

HW6

정보보호공학과 01921061 황송이

1 Matrix Inversion Lemma

The Matrix Inversion Lemma은 방정식(등식)이다.

$$(A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1} \cdot B \cdot (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot C \cdot A^{-1}$$

증명: A, B, C, D Matrix와 이에 대한 Inverse Matrix를 구한다.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

그 다음 2개의 곱을 구한다.

첫 번째

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot E + B \cdot G & A \cdot F + B \cdot H \\ C \cdot E + D \cdot G & C \cdot F + D \cdot H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

두 번째

$$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \cdot A + F \cdot C & E \cdot B + F \cdot D \\ G \cdot A + H \cdot C & G \cdot B + H \cdot D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

위의 두개의 Matrix는 8개의 Matrix 방정식(등식)을 형성한다.

$$A \cdot E + B \cdot G = I$$

$$A \cdot F + B \cdot H = 0$$

$$C \cdot E + D \cdot G = 0$$

$$C \cdot F + D \cdot H = I$$

$$E \cdot A + F \cdot C = I$$

$$E \cdot B + F \cdot D = 0$$

$$G \cdot A + H \cdot C = 0$$

$$G \cdot B + H \cdot D = I$$

위의 8개의 방정식을 다양한 순서로 결합하면 A, B, C, D에 대한 E, F, G, H의 2가지 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
(1) \ E &= (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} \\
(2) \ F &= -(A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} \cdot B \cdot D^{-1} \\
(3) \ G &= -D^{-1} \cdot C \cdot (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} \\
(4) \ H &= D^{-1} + D^{-1} \cdot C \cdot (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} \cdot B \cdot D^{-1} \\
(5) \ E &= A^{-1} + A^{-1} \cdot B \cdot (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \\
(6) \ F &= -A^{-1} \cdot B \cdot (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \\
(7) \ G &= -(D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \\
(8) \ H &= (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1}
\end{aligned}$$

(1)과 (5), (2)와 (6), (3)과 (7), (4)와 (8)과 같이 모두 inversion이 존재하기 때문에 Matrix Inversion Lemma는 증명된다.

2 Reference

[Matrix Inversion Lemma.pdf](#)