

확률 프로세스 - 과제 1

작성자: 김원식

1. 다음을 증명하세요:

$$\text{var} \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n \text{Var} X_k + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

증명 과정:

$\text{var} \sum_{k=1}^n X_k$ 는 분산의 기본 정의에 의하여 수식(1)로 변환된다:

$$\text{var} \sum_{k=1}^n X_k = E \left[\left(\sum_{k=1}^n X_k \right)^2 \right] - \left(E \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] \right)^2 \quad (1)$$

$$= E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \right] - \left(E \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] \right)^2 \quad (\text{중첩}) \quad (2)$$

기댓값 E 는 시그마 $\sum$ 안으로 들어갈 수 있으므로 수식(2)는 아래와 같이 변환이 가능하다:

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[X_i X_j] - \left(\sum_{k=1}^n E[X_k] \right)^2 \quad (3)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[X_i X_j] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[X_i] E[X_j] \quad (4)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E[X_i X_j] - E[X_i] E[X_j]) \quad (\text{결합법칙}) \quad (5)$$

수식(5)는 공분산과 같으므로

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \quad (6)$$

$$= \sum_{k=1}^n \text{Var} X_k + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) \quad (7)$$

따라서, $\text{var} \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n \text{Var} X_k + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$ 로 증명되었다.

2. 다음을 증명하세요:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

증명 과정:

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 는 상수라 적분 밖으로 빼낼 수 있으므로 수식(1)과 같이 표현할 수 있다:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (1)$$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ 라고 정의할 시, $x = \sigma z + \mu$; $dx = \sigma dz$ 로 정의할 수 있다.

$x = \sigma z + \mu$; $dx = \sigma dz$ 로 수식(1)을 다시 정의하면 아래와 같다:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\sigma z + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \sigma dz \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2 z^2}{2\sigma^2}\right) dz \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \quad (4)$$

수식(4)의 모양은 가우시안 적분 수식과 모양이 비슷한데, 가우시안 적분의 수식은 다음과 같다:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \sqrt{\pi} \quad (5)$$

$y^2 = \frac{z^2}{2}$ 라고 정의할 시, $y = \frac{z}{\sqrt{2}}$; $z = \sqrt{2}y$; $dz = \sqrt{2}dy$ 로 변형 가능하다.

수식(4)를 y 로 다시 정의하면

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) \sqrt{2} dy \quad (6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy}_{\sqrt{\pi}} \quad (\text{수식 (5), 가우시안 적분}) \quad (7)$$

수식(5)에 의해 $\sqrt{\pi}$ 값을 적용하면

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1 \quad (8)$$

따라서, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1$ 로 증명되었다.

3. De-Moivre-Laplace Theorem에 대한 리포트를 작성하세요.

증명 과정:

De-Moivre-Laplace Theorem은 아래와 같다:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{(k-np)^2 / 2(npq)^2}, \quad p+q=1, \quad p>0, \quad q>0 \quad (1)$$

스털링 근사(Stirling's formula)에 따르면, n 이 매우 큰 수면 다음과 같은 공식이 성립된다:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n \quad (2)$$

따라서 수식 $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ 을 수식(1)에 대입해 수식을 변환시키면 다음과 같다:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad (2)$$

$$\simeq \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} \sqrt{2\pi (n-k)}} p^k q^{n-k} \quad (3)$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} p^k q^{n-k} \quad (4)$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (5)$$

그 다음, 우변의 수식을 적절한 형식으로 변화시키기 위해 $\frac{k}{n} \rightarrow p$ 로 가정을 한 후 수식(5)를 변환시키면 다음과 같다:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi n \frac{k}{n} (1 - \frac{k}{n})}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \quad (6)$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}, \quad (p+q=1) \quad (7)$$

그 다음, 수식(7)을 변환시키기 위해 $\ln(1+x)$ 의 테일러 급수를 사용하는데 테일러 급수는 아래와 같다:

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (8)$$

테일러 급수가 적용된 수식(8)을 수식 (7)에 적용하면 아래와 같다:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ \ln \left(\left(\frac{np}{k} \right)^k \right) + \ln \left(\left(\frac{nq}{n-k} \right)^{n-k} \right) \right\} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -k \ln \left(\frac{k}{np} \right) + (k-n) \ln \left(\frac{n-k}{nq} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -k \ln \left(\frac{np + x\sqrt{npq}}{np} \right) + (k-n) \ln \left(\frac{n - np - x\sqrt{npq}}{nq} \right) \right\} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -k \ln \left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}} \right) + (k-n) \ln \left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}} \right) \right\} \quad p+q=1 \quad (11)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -k \left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} + \dots \right) + (k-n) \left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq} - \dots \right) \right\} \quad (12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ (-np - x\sqrt{npq}) \left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} + \dots \right) + (np + x\sqrt{npq} - n) \left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq} - \dots \right) \right\} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ (-np - x\sqrt{npq}) \left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} + \dots \right) - (nq - x\sqrt{npq}) \left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq} - \dots \right) \right\} \quad (14)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ \left(-x\sqrt{npq} + \frac{1}{2}x^2 q - x^2 q + \dots \right) + \left(x\sqrt{npq} + \frac{1}{2}x^2 p - x^2 p - \dots \right) \right\} \quad (15)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 q - \frac{1}{2}x^2 p - \dots \right\} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 (p+q) - \dots \right\} \quad (17)$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 \right\} \quad (18)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{\frac{-(k-np)^2}{2npq}} \quad (19)$$

따라서, $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{(k-np)^2/2(npq)^2}$, $p+q=1$, $p>0$, $q>0$ 은 증명되었

다.

4. 지수 분포의 평균과 분산을 구하세요:

증명 과정:

지수 분포의 정의는 아래와 같다:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

지수 분포의 평균과 분산은 부분적분을 이용하여 구할 수 있다.

지수 분포의 평균은 아래와 같다:

$$E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx \quad (2)$$

$$= \lambda \left(\left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} \right]_0^\infty - \left[\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right]_0^\infty \right) \quad (3)$$

$$= \lambda \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \quad (4)$$

지수 분포의 분산을 구하기 위해선 $E(X)$ 와 $E(X^2)$ 를 구해야 한다.

$E(X^2)$ 의 계산 과정은 아래와 같다:

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \quad (5)$$

$$= \lambda \left(\left[-\frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} - \left[\frac{1}{\lambda^2} 2x e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} + \left[-\frac{1}{\lambda^3} 2e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} \right) \quad (6)$$

$$= 2\lambda \frac{1}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2} \quad (7)$$

$E(X)$ 와 $E(X^2)$ 를 이용하여 분산을 구하면 다음과 같다:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \quad (8)$$

5. Gamma 분포의 평균과 분산을 구하세요:

증명 과정:

Gamma 분포의 정의는 아래와 같다:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad \because \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad (1)$$

Gamma 분포의 평균은 아래와 같다:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \quad (2)$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-\lambda x} dx \quad (3)$$

식의 변환을 위해 $t = (\lambda x)$ 로 정의하면 $dx = \frac{dt}{\lambda}$ 가 된다.

수식(3)을 dt 에 맞게 변화하면 아래와 같다:

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha}}{\lambda^{\alpha+1}} e^{-t} dt \quad (4)$$

$$= \frac{1}{\lambda \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt \quad (5)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} \quad (\text{Gamma 분포의 정의}) \quad (6)$$

Gamma 함수의 특성상 $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ 이므로 $E(X)$ 는 $\frac{\alpha}{\lambda}$ 이다.

Gamma 분포의 분산을 구하기 위해선 $E(X)$ 와 $E(X^2)$ 를 구해야 한다.

$E(X^2)$ 의 계산 과정은 아래와 같다:

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \quad (7)$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx \quad (8)$$

식의 변환을 위해 $t = (\lambda x)$ 로 정의하면 $dx = \frac{dt}{\lambda}$ 가 된다.

수식(8)을 dt 에 맞게 변화하면 아래와 같다:

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha+2}} e^{-t} dt \quad (4)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} e^{-t} dt \quad (5)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} \quad (\text{Gamma 분포의 정의}) \quad (6)$$

Gamma 함수의 특성상 $\Gamma(\alpha+2) = \alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)$ 이므로 $E(X^2)$ 는 $\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$ 이다.

$E(X)$ 와 $E(X^2)$ 를 이용하여 분산을 구하면 다음과 같다:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \quad (8)$$

6. 정규분포의 mgf는 $\exp(\mu t + (\sigma^2 t^2 / 2))$ 임을 증명하세요:

증명 과정:

정규분포의 pdf는 다음과 같다:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

정규분포의 mgf를 구하면

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (3)$$

식의 변환을 위해 $x - \mu = k$ 로 치환하면 $dx = dk$ 가 되므로 수식(3)을 dk 에 맞게 변화하면 다음과 같다:

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t(\mu+k) - \frac{k^2}{2\sigma^2}\right) dk \quad (4)$$

$$= \frac{\exp(\mu t)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(tk - \frac{k^2}{2\sigma^2}\right) dk \quad (5)$$

$$= \frac{\exp(\mu t)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(tk - \frac{k^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dk \quad (6)$$

$$= \frac{\exp(\mu t)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{k}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\sigma t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dk \quad (7)$$

$$= \frac{\exp(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{k}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\sigma t}{\sqrt{2}}\right)^2\right) dk \quad (8)$$

식의 변환을 위해 $\frac{k}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\sigma t}{\sqrt{2}} = s$ 로 치환하면 $dk = \sigma\sqrt{2}ds$ 가 되므로 수식(8)를 ds 에 맞게 변화하면 다음과 같다:

$$= \frac{\exp(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2) \sigma\sqrt{2}ds \quad (9)$$

$$= \frac{\exp(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2) ds \quad (9)$$

수식(10)의 적분 모양은 가우시안 적분 모양과 같은데, 가우시안 적분은 아래와 같다:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \sqrt{\pi} \quad (10)$$

가우시안 적분을 이용하면 $\sqrt{\pi}$ 가 소거되므로, $M_X(t) = \exp(\mu t + (\sigma^2 t^2 / 2))$ 는 증명되었다.

7. 오늘 비가 오고 내일 비올 확률을 α , 오늘 비가 안 오고 내일 비가 올 확률을 β 라고 할 때, 비가 오면 0, 비가 오지 않으면 1로 상태를 놓고 전이 확률 Matrix를 구하세요:

문제 풀이:

전이 확률 Matrix P 를 표현하면 아래와 같다:

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} \end{pmatrix} \quad (1)$$

P 의 각 원소들을 기술하면 아래와 같다:

$P_{0,0}$: 오늘 비가 오지 않고 내일도 비가 오지 않을 확률 $\rightarrow \frac{\beta(1 - \alpha - \beta)}{(\alpha + \beta)}$

$P_{0,1}$: 오늘 비가 오지 않고 내일도 비가 오지 않을 확률

$P_{0,1}$: 오늘 비가 오지 않고 내일은 비가 올 확률 $\rightarrow \beta$

$P_{1,0}$: 오늘 비가 오고 내일은 비가 오지 않을 확률

$P_{0,1}$: 오늘 비가 오지 않고 내일은 비가 올 확률 $\rightarrow \beta$

$P_{1,0}$: 오늘 비가 오고 내일은 비가 오지 않을 확률 $\rightarrow \frac{\alpha(1 - \alpha - \beta)}{(\alpha + \beta)}$

$P_{1,1}$: 오늘 비가 오고 내일도 비가 올 확률 $\rightarrow \alpha$

$P_{0,1}$: 오늘 비가 오지 않고 내일도 비가 오지 않을 확률

$P_{1,0}$: 오늘 비가 오지 않고 내일도 비가 오지 않을 확률

$P_{1,1}$: 오늘 비가 오지 않고 내일도 비가 오지 않을 확률

따라서 전이 Matrix P 는 아래와 같다:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\beta(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)} & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)} & \alpha \end{pmatrix} \quad (2)$$