확률 프로세스 - 과제 1

작성자: 김원식

1. 다음을 증명하세요:

$$var\sum_{k=1}^{n}X_k = \sum_{k=1}^{n}VarX_k + 2\sum\sum_{i<j}Cov(X_i, X_j)$$

증명 과정:

$var\sum_{k=1}^{n}X_k$는 분산의 기본 정의에 의하여 수식(1)로 변환된다:

$$\begin{aligned} var\sum_{k=1}^{n}X_k &= E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2\right] - \left(E\left[\sum_{k=1}^{n}X_k\right]\right)^2 && (1) \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iX_j\right] - \left(E\left[\sum_{k=1}^{n}X_k\right]\right)^2 \quad (\textstyle\sum \text{중첩}) && (2) \end{aligned}$$

기댓값 E는 시그마 $\sum$ 안으로 들어갈 수 있으므로 수식(2)는 아래와 같이 변환이 가능하다:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E[X_iX_j] - \left(\sum_{k=1}^{n}E[X_k]\right)^2 && (3) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E[X_iX_j] - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E[X_i]E[X_j] && (4) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j]) \quad (\text{결합법칙}) && (5) \end{aligned}$$

수식(5)는 공분산과 같으므로

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Cov(X_i, X_j) && (6) \\ &= \sum_{k=1}^{n}VarX_k + 2\sum\sum_{i<j}Cov(X_i, X_j) && (7) \end{aligned}$$

따라서, $var\sum_{k=1}^{n}X_k = \sum_{k=1}^{n}VarX_k + 2\sum\sum_{i<j}Cov(X_i, X_j)$ 로 증명되었다.

2. 다음을 증명하세요:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

증명 과정:

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$는 상수라 적분 밖으로 빼낼 수 있으므로 수식(1)과 같이 표현할 수 있다:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \tag{1}$$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ 라고 정의할 시, $x = \sigma z + \mu;\ dx = \sigma dz$ 로 정의할 수 있다.

$x = \sigma z + \mu;\ dx = \sigma dz$ 로 수식(1)을 다시 정의하면 아래와 같다:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{(\sigma z + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \sigma dz && (2)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{\sigma^2 z^2}{2\sigma^2}\right) dz && (3)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz && (4)
\end{aligned}$$

수식(4)의 모양은 가우시안 적분 수식과 모양이 비슷한데, 가우시안 적분의 수식은 다음과 같다:

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-y^2\right) dy = \sqrt{\pi} \tag{5}$$

$y^2 = \frac{z^2}{2}$라고 정의할 시, $y = \frac{z}{\sqrt{2}};\ z = \sqrt{2}y;\ dz = \sqrt{2}dy$ 로 변형 가능하다.

수식(4)를 y로 다시 정의하면

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp(-y^2)\sqrt{2}dy && (6)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} exp(-y^2)dy}_{\sqrt{\pi}} \quad (\text{수식 } (5), \text{ 가우시안 적분}) && (7)
\end{aligned}$$

수식(5)에 의해 $\sqrt{\pi}$ 값을 적용하면

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1 \tag{8}$$

따라서, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1$ 로 증명되었다.

3. De-Moivre-Laplace Theorem에 대한 리포트를 작성하세요.

증명 과정:

De-Moivre-Laplace Theorem은 아래와 같다:

$$\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{(k-np)^2/2(npq)^2}, \quad p+q=1, \quad p>0, \quad q>0 \qquad (1)$$

스털링 근사(Stirling's formula)에 따르면, n이 매우 큰 수면 다음과 같은 공식이 성립된다:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n \qquad (2)$$

따라서 수식 $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$을 수식(1)에 대입해 수식을 변환시키면 다음과 같다:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}p^k q^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} && (2)\\
&\simeq \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}(n-k)^{n-k}e^{-(n-k)}\sqrt{2\pi(n-k)}}p^k q^{n-k} && (3)\\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi k\,(n-k)}}\frac{n^n}{k^k\,(n-k)^{n-k}}p^k q^{n-k} && (4)\\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi k\,(n-k)}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} && (5)
\end{aligned}$$

그 다음, 우변의 수식을 적절한 형식으로 변화시키기 위해 $\frac{k}{n} \to p$ 로 가정을 한 후 수식(5)를 변환시키면 다음과 같다:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}p^k q^{n-k} &\simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi n\frac{k}{n}\,(1-\frac{k}{n})}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} && (6)\\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}, \quad (p+q=1) && (7)
\end{aligned}$$

그 다음, 수식(7)을 변환시키기 위해 $\ln(1+x)$의 테일러 급수를 사용하는데 테일러 급수는 아래와 같다:

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad (8)$$

테일러 급수가 적용된 수식(8)을 수식 (7)에 적용하면 아래와 같다:

$$
\begin{align}
\binom{n}{k} p^k q^{n-k} &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ \ln\left(\left(\frac{np}{k}\right)^k\right) + \ln\left(\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}\right) \right\} \tag{9} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ -k\ln\left(\frac{k}{np}\right) + (k-n)\ln\left(\frac{n-k}{nq}\right) \right\} \nonumber \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ -k\ln\left(\frac{np + x\sqrt{npq}}{np}\right) + (k-n)\ln\left(\frac{n - np - x\sqrt{npq}}{nq}\right) \right\} \tag{10} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ -k\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (k-n)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \right\} \qquad p+q=1 \tag{11} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ -k\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} + \cdots\right) + (k-n)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq} - \cdots\right) \right\} \tag{12} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ \left(-np - x\sqrt{npq}\right)\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} + \cdots\right) + \left(np + x\sqrt{npq} - n\right)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq} - \cdots\right) \right\} \tag{13} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ \left(-np - x\sqrt{npq}\right)\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} + \cdots\right) - \left(nq - x\sqrt{npq}\right)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq} - \cdots\right) \right\} \tag{14} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ \left(-x\sqrt{npq} + \frac{1}{2}x^2 q - x^2 q + \cdots\right) + \left(x\sqrt{npq} + \frac{1}{2}x^2 p - x^2 p - \cdots\right) \right\} \tag{15} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}x^2 q - \frac{1}{2}x^2 p - \cdots \right\} \tag{16} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}x^2 (p+q) - \cdots \right\} \tag{17} \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}x^2 \right\} \tag{18} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{\frac{-(k-np)^2}{2npq}} \tag{19}
\end{align}
$$

따라서, $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{(k-np)^2/2(npq)^2}, \quad p+q=1, \quad p>0, \quad q>0$은 증명되었다.

---

4. 지수 분포의 평균과 분산을 구하세요:

증명 과정:

지수 분포의 정의는 아래와 같다:

$$
f(x) = \lambda e^{-\lambda e}, \quad \lambda > 0 \tag{1}
$$

지수 분포의 평균과 분산은 부분적분을 이용하여 구할 수 있다.

지수 분포의 평균은 아래와 같다:

$$
\begin{align}
E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx &= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda e} dx \tag{2} \\
&= \lambda\left(\left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x}\right]_0^\infty - \left[\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty\right) \tag{3} \\
&= \lambda \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \tag{4}
\end{align}
$$

지수 분포의 분산을 구하기 위해선 $E(X)$와 $E(X^2)$를 구해야 한다.

$E(X^2)$의 계산 과정은 아래와 같다:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 f(x) dx = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda e} dx && (5) \\
&= \lambda \left(\left[-\frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^\infty - \left[\frac{1}{\lambda^2} 2x e^{-\lambda x} \right]_0^\infty + \left[-\frac{1}{\lambda^3} 2 e^{-\lambda x} \right]_0^\infty \right) && (6) \\
&= 2\lambda \frac{1}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2} && (7)
\end{aligned}
$$

$E(X)$와 $E(X^2)$를 이용하여 분산을 구하면 다음과 같다:

$$
Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \tag{8}
$$

---

5. Gamma 분포의 평균과 분산을 구하세요:

증명 과정:

Gamma 분포의 정의는 아래와 같다:

$$
f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad \because \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy \tag{1}
$$

Gamma 분포의 평균은 아래와 같다:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty x \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx && (2) \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\lambda x} dx && (3)
\end{aligned}
$$

식의 변환을 위해 $t = (\lambda x)$로 정의하면 $dx = \frac{dt}{\lambda}$가 된다.

수식(3)을 dt에 맞게 변화하면 아래와 같다:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{\lambda^{\alpha+1}} e^{-t} dt && (4) \\
&= \frac{1}{\lambda \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt && (5) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} \quad (\text{Gamma 분포의 정의}) && (6)
\end{aligned}
$$

Gamma 함수의 특성상 $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$이므로 $E(X)$는 $\frac{\alpha}{\lambda}$이다.

Gamma 분포의 분산을 구하기 위해선 $E(X)$와 $E(X^2)$를 구해야 한다.

$E(X^2)$의 계산 과정은 아래와 같다:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx && (7) \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx && (8)
\end{aligned}
$$

식의 변환을 위해 $t = (\lambda x)$로 정의하면 $dx = \dfrac{dt}{\lambda}$가 된다.

수식(8)을 dt에 맞게 변화하면 아래와 같다:

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha+2}} e^{-t} dt \tag{4}$$
$$= \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} e^{-t} dt \tag{5}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} \quad (\text{Gamma 분포의 정의}) \tag{6}$$

Gamma 함수의 특성상 $\Gamma(\alpha+2) = \alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)$이므로 $E(X^2)$는 $\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$이다.

$E(X)$와 $E(X^2)$를 이용하여 분산을 구하면 다음과 같다:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \tag{8}$$

---

6. 정규분포의 mgf는 $exp(\mu t + (\sigma^2 t^2/2))$임을 증명하세요:

증명 과정:

정규분포의 pdf는 다음과 같다:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1}$$

정규분포의 mgf를 구하면

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^\infty exp(tx) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \tag{2}$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty exp\left(tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \tag{3}$$

식의 변환을 위해 $x - \mu = k$로 치환하면 $dx = dk$가 되므로 수식(3)를 dk에 맞게 변화하면 다음과 같다:

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty exp\left(t(\mu+k) - \frac{k^2}{2\sigma^2}\right) dk \tag{4}$$
$$= \frac{exp(\mu t)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty exp\left(tk - \frac{k^2}{2\sigma^2}\right) dk \tag{5}$$
$$= \frac{exp(\mu t)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty exp\left(tk - \frac{k^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dk \tag{6}$$
$$= \frac{exp(\mu t)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty exp\left(-\left(\frac{k}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\sigma t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dk \tag{7}$$
$$= \frac{exp(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty exp\left(-\left(\frac{k}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\sigma t}{\sqrt{2}}\right)^2\right) dk \tag{8}$$

식의 변환을 위해 $\frac{k}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\sigma t}{\sqrt{2}} = s$로 치환하면 $dk = \sigma\sqrt{2}ds$가 되므로 수식(8)를 ds에 맞게 변화하면 다음과 같다:

$$= \frac{exp(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-s^2\right) \sigma\sqrt{2}ds \tag{9}$$

$$= \frac{exp(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-s^2\right) ds \tag{9}$$

수식(10)의 적분 모양은 가우시안 적분 모양과 같은데, 가우시안 적분은 아래와 같다:

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-y^2\right) dy = \sqrt{\pi} \tag{10}$$

가우시안 적분을 이용하면 $\sqrt{\pi}$가 소거되므로, $M_X(t) = exp(\mu t + (\sigma^2 t^2/2))$는 증명되었다.

---

7. 오늘 비가 오고 내일 비올 확률을 α, 오늘 비가 안 오고 내일 비가 올 확률을 β라고 할 때, 비가 오면 0, 비가 오지 않으면 1로 상태를 놓고 전이 확률 Matrix를 구하세요:

문제 풀이:

전이 확률 Matrix P를 표현하면 아래와 같다:

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

P의 각 원소들을 기술하면 아래와 같다:

$P_{0,0}$: 오늘 비가 오지 않고 내일도 비가 오지 않을 확률 $\rightarrow \frac{\beta(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)}$

$P_{0,1}$: 오늘 비가 오지 않고 내일은 비가 올 확률 $\rightarrow \beta$

$P_{1,0}$: 오늘 비가 오고 내일은 비가 오지 않을 확률 $\rightarrow \frac{\alpha(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)}$

$P_{1,1}$: 오늘 비가 오고 내일도 비가 올 확률 $\rightarrow \alpha$

따라서 전이 Matrix P는 아래와 같다:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\beta(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)} & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)} & \alpha \end{pmatrix} \tag{2}$$