HW1. 가부번집합과 가산집합

정보보호공학과 01921061 황송이

September 22, 2019

1 가부번집합과 가산집합이란?

1.1 정의

일반적으로 가산 집합에는 유한 집합이 포함되지만, 유한 집합을 제외하고 셀 수 있는 무한 집합만을 가리키는 경우도 있다. 앞의 경우는 가산 이하라는 표현을, 뒤의 의미에 대해 가산 무한이나 가부번 집합이라고 표현한다. 엄밀히는 유한 집합(가산 이하)은 자연수 집합으로 단사 함수가 존재하나 원소의 개수가 유한한 집합을 말하며, 가부번 집합은 자연수 집합으로 전단사 함수가 존재하는 집합을 말한다.

1.1.1 가부번집합

집합 X에 대하여 X $\sim \mathbb{N}$일 때 X를 가부번집합(denumerable set)이라고 한다.

1.1.2 가산집합

유한이거나 가부번인 집합을 가산집합(countable set)이라 한다. 가산 집합은 자연수의 집합으로의 단사 함수가 존재하는 집합을 말한다. 가령 짝수의 집합은 무한집합이지만 각 짝수는 자연수에 순서대로 1:1 대응이 가능하므로 가산집합이다. 자연수, 정수, 유리수의 집합은 가산집합이다. 어떤 집합이 가산 집합인 경우, 그 집합(의 원소의 개수)을 셀 수 있다 혹은 가산 개의 원소가 있다고 정의한다.

1.2 참고

X가 가부번집합이면 X의 원소를 나열하여 X = $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$와 같이 쓸 수 있다.

2 정리와 증명

2.1 첫번째

2.1.1 정리

X: 가부번집합, Y $\subseteq$ X Y: 무한집합 $\Rightarrow$ Y: 가부번집합

2.1.2 증명

X가 가부번집합이므로 X = $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$로 나타낼 수 있다. Y가 무한 부분집합일 때 n_1을 x_{n_1} ∈Y을 만족시키는 가장 작은 첨자라 하자. 또 n_2를 x_{n_2} ∈ Y - $\{x_{n_1}\}$을 만족시키는 가장 작은 첨자라 하자.
이와 같이 $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k-1}$을 찾아낸 후에 $x_{n_k} \in Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k-1}\}$이 되는 가장 작은 첨자를 x_{n_k}라 하자. 집합 Y가 무한집합이므로 그런 x_{n_k}는 항상 존재한다. 그러면 Y의 모든 원소가 이런 형태로 표현이 되고, 따라서 Y = $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots\}$가 된다.
이제 함수 $f : \mathbb{N} \to Y, f(i) = x_{n_i}$를 생각하면 f는 전단사함수이다. 따라서 Y는 가부번집합이다.

2.1.3 예시

소수의 집합 $P = \{x \mid x$는 소수$\}$는 자연수의 무한 부분집합이므로, 가부번집합이다.

2.1.4 따름정리

가산집합의 모든 부분집합은 가산집합이다.

2.2 두번째

2.2.1 정리

A: 유한집합 B: 가부번집합 ⇒ $A \cup B$:가부번집합

2.2.2 증명

A가 유한집합이므로 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$라 하자. B가 가부번집합이므로 $B = \{y_1, y_2, \cdots\}$로 나타낼 수 있다.
따라서 $A \cup B = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots\}$로 나타나게 되어 가부번집합이 된다.

2.3 세번째

2.3.1 정리

A, B: 가부번집합 ⇒ $A \cup B$: 가부번집합

2.3.2 증명

A, B가 가부번집합이므로, $A \sim \mathbb{N}, B \sim \mathbb{N}$이다. 그런데 $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_e = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_0 = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$이다. 그러므로 $A \sim \mathbb{N}_e$이고 $B \sim \mathbb{N}_0$이다.
(1) $A \cap B = \emptyset$일 경우: $A \cup B \sim \mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$
$\therefore A \cup B$: 가부번집합이다.
(2) $A \cap B \neq \emptyset$일 경우: $B - A = C \Rightarrow A \cup B = A \cup C$
a) 만일 C가 무한집합이면 C는 가부번집합이 된다. 따라서 $A \cup C \sim \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_e$ ($\because A \cap C = \emptyset$)
그런데 $A \cup B = A \cup C$이므로 $A \cup B \sim \mathbb{N}$
$\therefore A \cup B$: 가부번집합

b) C가 유한집합일 경우 $\Rightarrow A \cup C$: 가부번집합
그런데 $A \cup B = A \cup C$이다.
$\therefore A \cup B$: 가부번집합이다.

2.3.3 따름정리

$\{A_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$: 가부번집합들의 집합족 $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i$: 가부번집합

2.4 네번째

2.4.1 정리

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: 가부번이다.

2.4.2 증명

함수 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$를 $f(i, j) = 2^i 3^j$로 정의하자. 그러면 f는 단사함수이다.
$\Rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$
$\Rightarrow f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$: 무한집합 ($\because \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: 무한집합)
그런데 $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$이므로 $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$은 가부번집합의 무한 부분집합이 된다. 따라서 $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$: 가부번집합
그런데 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}\ f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$이므로, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$이 가부번집합이다.

2.4.3 따름정리

두 집합 A, B가 가부번집합이면 AXB도 가부번집합이다.

2.4.4 따름정리의 증명

두 집합 A, B가 가부번집합이므로 $A\ \mathbb{N}, B\ \mathbb{N}$이고 정리 6.25에 의해 $AXB\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. 그런데 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$이 가부번집합이므로 AXB도 가부번집합이다.

2.5 다섯번째

2.5.1 정리

모든 $k \in \mathbb{N}$에 대해 A_k가 가부번집합이고, 모든 $i \neq j$에 대해 $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$: 가부번집합

2.5.2 증명

모든 $k \in \mathbb{N}$에 대해 A_k가 가부번집합이므로, $A_k \sim \mathbb{N}$이다.
또한 $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{k\}$이므로, ($\because f(i) = (i, k)$: 전단사함수) $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{k\}$이다.
따라서 $\forall k \in \mathbb{N}, A_k \sim \mathbb{N} \times \{k\}$이다.
$\Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \sim \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{k\}$
($\because f_k : A_k \sim \mathbb{N} \times \{k\}$가 전단사함수라 할 때 $f(x) = f_k(x), x \in A_k$로 정의되는 함수 $f : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \sim \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{k\}$도 전단사이다.)
그런데 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{k\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$이므로 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$이고 따라서 가부번집합이다.

2.5.3 따름정리

모든 $k \in \mathbb{N}$에 대해 A_k가 가산집합이면, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$도 가산집합이다.

2.5.4 예시

(1) $\mathbb{Q}$: 가부번이다.
-¿ 모든 유리수를 서로소인 $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}$를 사용해서 분수형태인 $\frac{q}{p}$로 나타내기로 하자. 이제 $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{q}{p} \mid \frac{q}{p} > 0\}$, $\mathbb{Q}^- = \{-\frac{q}{p} \mid \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}^+\}$ 하면, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$이 된다.
$\mathbb{Q}^+$: 가부번집합임을 증명하자. $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$를 $f\left(\frac{q}{p}\right) = (p, q)$로 정의하자. 그러면 분명히 f는 단사함수이다.
따라서 $\mathbb{Q}^+ \sim f(\mathbb{O}^+) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
그런데 $\mathbb{Q}^+ \supseteq \mathbb{N}$이므로 $\mathbb{Q}^+$는 무한집합니다.
그러므로 $f(\mathbb{Q}^+)$은 가부번집합 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$의 무한 부분집합이다.
따라서 $f(\mathbb{Q}^+)$은 가부번이다.
$\therefore \mathbb{Q}^+$: 가부번이다. 그런데 $\mathbb{Q}^+ \sim \mathbb{Q}^-$이므로 $\mathbb{Q}^-$도 가부번이다.($\because f(x) = -x$가 전단사)
$\therefore \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$: 가부번이다.
(2) 위 예제에 의해 $\mathbb{Q}$가 가부번 집합이므로 $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$임을 알 수 있다.
(3) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$이므로 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$이고, 따라서 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$는 가부번집합이다.

2.6 여섯번째

2.6.1 정리

임의의 무한집합에 대하여 그 부분집합 중에 가부번집합이 존재한다.

2.6.2 증명

X: 무한집합이라 하자. $X \neq \emptyset$이므로 $\exists x_1 \in X$. 또한 $X - \{x_1\} \neq \emptyset$이므로 $\exists x_2 \in X - \{x_1\}$. 이와 같은 방법으로 모든 자연수 k에 대해 $\exists x_k \in X - \{x_1, x_2, \cdots, x_k - 1\}$. 이제 집합 $Y = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$를 생각하면 분명히 $Y \subseteq X$이고 Y는 가부번이다.